1. Формулировка вариационных неравенств

Задача 1: задача о двухстороннем препятствии

Пусть $\phi(x) \leqslant \psi(x)$ для всех $x \in \Omega$; $\phi(x) \leqslant 0 \leqslant \psi(x)$для всех $x \in \partial\Omega$. Определим выпуклое множество

$$K = \{u \in H^1_0(\Omega) : \phi(x) \leqslant u(x) \leqslant \psi(x) \text{ п.вс. в } \Omega\}$$

и рассмотрим вариационное неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v-u)dx \geqslant \int\limits_{\Omega} f(v-u)dx \quad \forall v \in K,\ u \in K. \tag{1}$$

Если решение $u(x)$ задачи (1) достаточно гладкое, то область Ω представима в виде объединения подобластей

$$\Omega_- = \{x \in \Omega :\ u(x) = \phi(x)\},\ \ \Omega_+ = \{x \in \Omega :\ u(x) = \psi(x)\},$$

$$\Omega_{eq} = \{x \in \Omega :\ \phi(x) < u(x) < \psi(x)\}.$$

В Ω_{eq} справедливо уравнение $-\Delta u(x) = f(x)$, в то время как в остальных подобластях решение удовлетворяет неравенствам:

$$-\Delta u(x) - f(x) \geqslant 0 \text{ в } \Omega_-,\ \ -\Delta u(x) - f(x) \leqslant 0 \text{ в } \Omega_+.$$

Задача 2: задача Синьорини

Пусть граница области Ω и состоит из двух частей: $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_C$, и пусть $V = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0 \text{ п. в. на } \Gamma_D\}$. Определим множество

$$K = \{u \in V :\ u(x) \geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_C\}$$

и рассмотрим вариационное неравенство: найти такое $u \in K$, что

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v-u)dx \geqslant \int\limits_{\Omega} f(v-u)dx \quad \forall v \in K, \tag{2}$$

где $f \in L_2(\Omega)$.

При дополнительном предположении о гладкости решения задача может быть сформулирована в поточечном виде:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma_D, \\ u \geqslant 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \geqslant 0, \quad u\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{на } \Gamma_C, \end{cases}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

2. Конечно-разностные аппроксимации вариационных неравенств

Пусть $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ и $\bar{\omega} = \{x = (ih, jh) : 0 \leqslant i, j \leqslant m+1,\ (m+1)h = 1\}$ — равномерная сетка на замыкании области $\bar{\Omega}$. Множество внутренних узлов сетки обозначим через ω, множество граничных узлов — через $\partial\omega$. В случае, если граница области $\partial\Omega$ состоит из частей Γ_D и Γ_C, обозначим через γ_D и γ_C — множества узлов сетки на $\bar{\Gamma}_D$ (замыкание Γ_D) и Γ_C. Обозначим через Δ_h конечно-разностный оператор Лапласа: $\Delta_h = \bar{\partial}_1\partial_1 + \bar{\partial}_2\partial_2$. Здесь

$$\bar{\partial}_1 u_i = \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{h},\ \partial_1 u_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h}$$

и разностные производные $\overline{\partial}_2 u_i,\ \partial_2 u_i$ определены аналогично.

Разностная схема для задачи о препятствии.

$$
\begin{gathered}
-\partial_1\bar{\partial}_1 u(x) - \partial_2\bar{\partial}_2 u(x) + p(x, u(x)) \ni f(x), \quad \text{при } x = x_{ij} \in \omega, \\
u(x) = 0, \quad \text{при } x \in \partial\omega,
\end{gathered} \tag{3}
$$

где $p(x, u(x)) \equiv p_{ij}(u_{ij})$ — многозначные функции

$$
p_{ij}(u_{ij}) = \begin{cases} (-\infty, 0], & \text{если } u_{ij} = \phi_{ij}, \\ 0, & \text{если } \phi_{ij} < u_{ij} < \psi_{ij}, \\ [0, +\infty), & \text{если } u_{ij} = \psi_{ij}. \end{cases} \tag{4}
$$

Запись "в индексах" системы (3):

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{h^2}\big(4u_{ij} - u_{i-1j} - u_{i+1j} - u_{ij-1} - u_{ij+1}\big) + p_{ij}(u_{ij}) \ni f_{ij} \text{ для } 1 \leqslant i, j \leqslant m; \\
u_{0j} = u_{m+1,j} = u_{i0} = u_{i,m+1} = 0.
\end{gathered}
$$

Разностная схема для задачи Синьорини.

Далее считаем, что Γ_C – левая сторона Ω, поэтому $x \in \gamma_C$ в случае $i = 0, 1 \leqslant j \leqslant m$.

$$
\begin{gathered}
-\partial_1\bar{\partial}_1 u(x) - \partial_2\bar{\partial}_2 u(x) = f(x) \quad \text{при } x \in \omega, \\
-\frac{1}{2}\partial_2\bar{\partial}_2 u(x) - \frac{1}{h}\partial_1 u(x) + \frac{1}{h} p(x, u(x)) \ni \frac{1}{2} f(x) \quad \text{при } x \in \gamma_C \\
u(x) = 0, \quad \text{при } x \in \gamma_D,
\end{gathered} \tag{5}
$$

где $p(x, u(x)) \equiv p_{ij}(u_{ij})$ — многозначные функции

$$
p_{ij}(u_{ij}) = \begin{cases} (-\infty, 0], & \text{если } u_{ij} = 0, \\ 0, & \text{если } u_{ij} > 0. \end{cases} \tag{6}
$$

Запись "в индексах" системы (5):

$$\frac{1}{h^2}\big(4u_{ij} - u_{i-1j} - u_{i+1j} - u_{ij-1} - u_{ij+1}\big) = f_{ij} \text{ для } 1 \leqslant i,j \leqslant m;$$
$$\frac{1}{h^2}(2u_{0,j} - \frac{1}{2}u_{0,j-1} - \frac{1}{2}u_{0,j+1} - u_{1,j}) + \frac{1}{h}p_{0j}(u_{0j}) \ni \frac{1}{2}f_{0j} \text{ для } i = 0, 1 \leqslant j \leqslant m;$$
$$u_{m+1,j} = u_{i0} = u_{i,m+1} = 0.$$

3. Итерационный метод SOR для конечномерного вариационного неравенства (включения)

Разностные схемы в приведенных выше примерах могут быть записаны в виде конечномерного включения

$$Au + P(u) \ni f, \tag{7}$$

где u – вектор узловых параметров соответствующей сеточной функции, $A = A^T$ — симметричная и положительно определенная матрица, P – диагональный и монотонный (многозначный) оператор.

(Отметим, что здесь вместо u_{ij} использовано обозначение u_i, т.е. подразумевается, что все компоненты сеточной функции u_{ij} занумерованы одним индексом. Это означает, что мы выбрали какую-ту нумерацию сеточных узлов. Это сделано для того, чтобы использовать терминологию линейной алгебры. Далее, при описании алгоритмов, мы вернемся к более удобным для использования "массивам" с двойным индексом.)

Будем использовать представление матрицы в виде $A = D - L - L^T$, где L — строго нижняя треугольная матрица, D — диагональная матрица.

Пусть $\sigma \in (0, 2)$ — параметр релаксации. Поточечный метод верхней релаксации (SOR-метод) может быть записан как

$$\left(\frac{1}{\sigma}D - L\right) u^{n+1} + P(u^{n+1}) \ni \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) Du^n + L^T u^n + f, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Разделим i-ю строку включения (8) на a_{ii} — диагональный элемент матрицы A, и перенесем известные величины в правую часть:

$$u_i^{n+1} + \frac{\sigma}{a_{ii}} p_i(u_i^{n+1}) \ni (1-\sigma)u_i^n + \frac{\sigma}{a_{ii}} \left(\sum_{j>i} a_{ij} u_j^{n+1} + \sum_{j<i} a_{ij} u_j^n + f_i \right) \equiv F_i^n. \tag{9}$$

Критерий остановки: малость нормы невязки

При решении итерационным методом (8) включения $Au+P(u) \ni f$ мы находим на $n+1$-ой итерации не только вектор u^{n+1}, но и единственную селекцию $\gamma^{n+1} \in P(u^{n+1})$ из множества $P(u^{n+1})$. Именно, из (9) следует, что

$$\gamma_i^{n+1} = \frac{a_{ii}}{\sigma}(F_i^n - u_i^{n+1}).$$

Вектор невязки на n-ой итерации определяется равенством

$$r^n = Au^n + \gamma^n - f, \quad \gamma^n \in P(u^n).$$

Если m — минимальное собственное число A, то

$$\|u^u - u\| \leqslant m^{-1} \|r^n\|. \tag{10}$$

Отсюда следует, что если мала норма невязки, то и погрешность $\|u^u - u\|$ также мала, а при знании константы m мы имеем гарантированную количественную оценку погрешности.

В оценке (10) $\|v\| = \big(\sum_{i,j} v_{ij}^2\big)^{1/2}$ – это евклидова норма "вектора" v. Однако при решении сеточных задач следует использовать нормы, согласованные с интегральными нормами функций непрерывного аргумента

x. В рассматриваемых примерах вместо евклидовой нормы следует использовать сеточный аналог L_2-нормы (которая определяется равенством $\|u\| = \big(\int\limits_\Omega u^2(x)dx\big)^{1/2}$):

$$\|v\|_{L_2} = \big(\sum_{i,j} h^2 v_{ij}^2\big)^{1/2}$$

4. Метод SOR для примеров сеточных вариационных неравенств

Алгоритм SOR-метода для сеточной задачи о препятствии

1. задаем начальное приближение $u = u_{ij}, 0 \leqslant i, j \leqslant m{+}1$, удовлетворяющее условиям Дирихле на всей границе: $u_{0j} = u_{m+1,j} = u_{i0} = u_{i,m+1} = 0$;

2. вычисляем компоненты новой итерации вектора u:

   для $i = \overline{1,m}$**,** $j = \overline{1,m}$

   2.1. находим $v = (1{-}\sigma)u_{ij}{+}\sigma\dfrac{h^2}{4}\left(\dfrac{1}{h^2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) + f_{i,j}\right)$

   2.2. полагаем $u_{i,j}$ равной проекции v на соответствующий промежуток числовой оси:

$$u_{ij} = \begin{cases} \phi_{ij}, & \text{если } v < \phi_{ij}, \\ v, & \text{если } \phi_{ij} \leqslant v \leqslant \psi_{ij}, \\ \psi_{ij}, & \text{если } v > \psi_{ij}. \end{cases}$$

   2.3. определяем $\gamma_{ij} = \dfrac{4}{h^2\sigma}(v - u_{ij})$.

3. находим вектор невязки r:

   для $i = \overline{1,m}$**,** $j = \overline{1,m}$

   $r_{ij} = \dfrac{1}{h^2}\big(4u_{ij} - u_{i-1j} - u_{i+1j} - u_{ij-1} - u_{ij+1}\big) + \gamma_{ij} - f_{ij}.$

4. если не выполнен **критерий остановки**

$$\|r\|_{L_2} = \big(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} h^2 r_{ij}^2 \big)^{1/2} < \varepsilon,$$

то переходим к п. 2.

Алгоритм SOR-метода для сеточной задачи Синьорини

1. задаем начальное приближение $u = u_{ij}, 0 \leqslant i,j \leqslant m{+}1$, удовлетворяющее условиям Дирихле на границе γ_D: $u_{m+1,j} = u_{i0} = u_{i,m+1} = 0$;

2. вычисляем компоненты новой итерации векторов u и γ:

   2.1. **для** $i = \overline{1,m}$**,** $j = \overline{1,m}$ находим

   $$u_{ij} = (1-\sigma)u_{ij} + \sigma\frac{h^2}{4}\left(\frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) + f_{i,j}\right),$$

   полагаем $\gamma_{ij} = 0$.

   2.2 **для** $i = 0$**,** $j = \overline{1,m}$ находим

   $$v = (1-\sigma)u_{0j} + \sigma\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{h^2}(u_{1,j} + \frac{1}{2}u_{0,j-1} + \frac{1}{2}u_{0,j+1}) + \frac{1}{2}f_{i,j}\right);$$

   полагаем $u_{0,j}$ равной проекции v на соответствующий промежуток числовой оси:

   $$u_{0j} = \begin{cases} 0, & \text{если } v < 0, \\ v, & \text{если } v \geqslant 0; \end{cases}$$

   определяем $\gamma_{0j} = \dfrac{2}{h^2\sigma}(v - u_{0j})$.

3. находим вектор невязки r:

   3.1 **для** $i = \overline{1,m}$**,** $j = \overline{1,m}$

   $r_{ij} = \dfrac{1}{h^2}\big(4u_{ij} - u_{i-1j} - u_{i+1j} - u_{ij-1} - u_{ij+1}\big) - f_{ij};$

3.2 **для** $i = 0,\ j = \overline{1, m}$

$r_{0j} = \dfrac{1}{h^2}(2u_{0,j} - \dfrac{1}{2}u_{0,j-1} - \dfrac{1}{2}u_{0,j+1} - u_{1,j}) + \dfrac{1}{h}\gamma_{0j} - \dfrac{1}{2}f_{0j}.$

4. если не выполнен **критерий остановки**

$$\|r\|_{L_2} = \Big(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant m} h^2 r_{ij}^2 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \frac{1}{2} h^2 r_{0j}^2 \Big)^{1/2} < \varepsilon,$$

то переходим к п. 2.

5. Точные решения сеточных вариационных неравенств с ограничениями на решение

Для тестирования итерационного алгоритма и программы полезно производить расчеты для задач с известным **точным решением** соответствующей **сеточной** задачи.

Рассмотрим вариационное неравенство

$$(Au, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geqslant (f, v - u),$$

эквивалентное включению

$$Au + \partial\varphi(u) \ni f.$$

Здесь A – положительно определенная матрица и φ – собственная, выпуклая и полунепрерывная снизу функция.

Будем строить вектор правой части f по известному решению u. Пусть вектор u такой, что $u \in D(\partial\varphi)$. Тогда, выбрав произвольно селекцию $\xi \in \partial\varphi(u)$ из множества $\partial\varphi(u)$, положим $f = Au + \xi$.

Если φ является индикаторной функцией некоторого выпуклого и замкнутого множества U_{ad}, то область определения $D(\partial\varphi)$ оператора $\partial\varphi$ совпадает с U_{ad}. Поэтому надо взять вектор u, такой, что $u \in U_{ad}$.

Пример: сеточная задача о двухстороннем препятствии ((3), (4))

$$-\partial_1\bar{\partial}_1 u(x) - \partial_2\bar{\partial}_2 u(x) + p(x, u(x)) \ni f(x), \qquad \text{при } x = x_{ij} \in \omega,$$
$$u(x) = 0, \qquad \text{при } x \in \partial\omega.$$

Разобьем множество сеточных узлов ω на непересекающиеся подмножества ω_0, ω^+ и ω^-. В качестве решения можно взять любую сеточную $u(x)$, такую что

1) она равна нулю в точках $\partial\omega$;

2) принимает значения ϕ_{ij} в точках $x_{ij} \in \omega^-$ и значения ψ_{ij} в точках $x_{ij} \in \omega^+$;

3) принимает любые значения из интервала (ϕ_{ij}, ψ_{ij}) в точках $x_{ij} \in \omega_0$.

Положим

$$p(x_{ij}) = \begin{cases} \text{любое } \gamma_{ij} < 0, & \text{если } x_{ij} \in \omega^-, \\ 0, & \text{если } x_{ij} \in \omega_0, \\ \text{любое } \delta_{ij} > 0, & \text{если } x_{ij} \in \omega^+, \end{cases}$$

Теперь правая часть определяется равенством $f(x) = -\partial_1\bar{\partial}_1 u(x) - \partial_2\bar{\partial}_2 u(x) + p(x)$.

Замечание 1. *Несмотря на большую произвольность в выборе и не надо забывать, что это сеточная аппроксимация решения вариационного неравенства, которое обладает определенной гладкостью. В случае области $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ и однородных условий Дирихле ($u = 0$ на границе) можно строить $u(x, y)$ следующим образом.*

Берем линейную комбинацию функций, составленных из элементарных функций и равных нулю на границе. Например, из функций

$$\sin m\pi x \, \sin n\pi y \ \textit{или} \ x(1-x)y(1-y).$$

Коэффициенты выбираем так, чтобы полученная функция $\tilde{u}$ на некоторых подобластях Ω нарушала ограничения $\phi(x,y) \leqslant \tilde{u}(x,y) \leqslant \psi(x,y)$. Теперь определяем сеточную функцию u в узлах сетки равенствами (срезка функции $\tilde{u}$):

$$u(x_{ij}) = \begin{cases} \phi(x_{ij}), & \text{если } \tilde{u}(x_{ij}) < \phi(x_{ij}), \\ \tilde{u}(x_{ij}), & \text{если } \phi(x_{ij}) \leqslant \tilde{u}(x_{ij}) \leqslant \psi(x_{ij}), \\ \psi(x_{ij}), & \text{если } \tilde{u}(x_{ij}) > \psi(x_{ij}). \end{cases}$$

При построении $p(x_{ij})$ также не надо "увлекаться" большими по модулю и сильно меняющимися γ_{ij} и δ_{ij}.